Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$

FGN1

Théorème : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \neq 6$. Les Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont intérieurs, c'est à dire, de la forme $s \mapsto \sigma \circ s \circ \sigma^{-1}$ où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Preuve : Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$. On sait que l'ensemble T des transpositions engendre $\mathfrak{S}_n$.
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $(a_1, .., a_k)$ un k-cycle, on a alors $\sigma(a_1, .., a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), .., \sigma(a_k))$ (*).
Ainsi, si $s \in \mathfrak{S}_n$ et $s_1, .., s_k$ est la décomposition en cycle disjoint de s ($s = s_1 ... s_k$) on a alors $\sigma s \sigma^{-1} = (\sigma s_1 \sigma^{-1}) ... (\sigma s_k \sigma^{-1})$ (**) où $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $\sigma s_i \sigma^{-1}$ est un cycle de même taille que s_i et comme les s_i sont à support disjoint, les $\sigma s_i \sigma^{-1}$ le sont aussi.

* Montrons que $\varphi(T) = T$: (En effet, φ envoit les éléments d'ordre 2 sur un élément d'ordre 2, or les ~~doubles~~ produits transpositions disjointes sont d'ordre 2 donc faut éliminer ce cas)
Notons T_k l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui sont produits de k transpositions à supports disjoints. En particulier $T_1 = T$.
D'après la relation (**), chaque ensemble T_k est une orbite pour l'action par conjugaison.
Ainsi, l'image par φ d'une orbite, est encore une orbite, car $\varphi(\sigma \circ s \circ \sigma^{-1}) = \varphi(\sigma) \circ \varphi(s) \circ \varphi(\sigma)^{-1}$
Ainsi, $\exists k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\varphi(T_1) = T_{k_0}$.

Montrons que $\varphi(T_1) = T_k \Leftrightarrow k = 1$ par un argument de cardinalité :

On a $|T_1| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ et pour $k \geq 2$ $|T_k| = \frac{\binom{n}{2} \times \binom{n-2}{2} \times ... \times \binom{n-2k+1}{2}}{k!}$
(On divise par $k!$ car on permuter les k transpositions, $k!$ possibilités)

D'où $|T_k| = \frac{n(n-1) ... (n-2k+1)}{2^k k!}$. En supposans $|T_1| = |T_k|$ pour $k \geq 2$, on obtient :
En réécrivant cette équation, on obtient : $k! \, 2^k = (n-2)(n-3) ... (n-2k+1)$.
Si $k = 2$, on a $(n-2)(n-3) = 4$ qui n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$.
Si $k \geq 3$, on a $\binom{n-k}{k}(n-2) ... (n-k+1) = 2^{k-1}$, ce qui est possible que si $n - k + 1 = n - 2$ (car sinon, le terme de gauche a un facteur impair) donc $k = 3$ d'où $\binom{n-3}{3}(n-2) = 4 \Rightarrow n = 6$ impossible.

Donc on a $\varphi(T_1) = T_1$.

On s'intéresse aux transpositions $T' = (1, h)$ pour $h \in [\![2, n]\!]$ qui génèrent $\mathfrak{S}_n$:

Il existe a_1 et a_2 distincts tel que $\varphi((1\,2)) = (a_1, a_2)$. De même, il existe a et b tel que $\varphi((1,3)) = (a,$
Comme $(1,2)$ et $(1,3)$ ne commutent pas, alors (a_1, a_2) et (a, b) ne commutent pas donc $\{a_1, a_2\} \cap \{a, b\} \neq \emptyset$. On peut supposer $a = a_1$ et on note $b = a_3$, d'où $\varphi((1,3)) = (a_1, a_3)$
L'injectivité de φ assure que $a_2 \neq a_3$.

Montrons par recurrence sur $i \in [\![1, n]\!]$ que $\varphi((1, i))$ s'écrit (a_1, a_i) où $a_i \neq a_h$ pour $h < i$:

C'est vrai pour $i = 2, 3$. Supposons $i > 3$.
On a par hypothèse de recurrence $\varphi((1,h)) = (a_1, a_h)$ $\forall\, 2 \leq h \leq i-1$. Alors $\varphi((1,i))$ est une transposition dont le support rencontre (a_1, a_h) pour $2 \leq h \leq i-1$ car $(1,i)$ et $(1,h)$ commutent pas.
Si a_1 n'était pas dans le support de $\varphi((1,i))$, les a_h pour $h \in [\![2, i-1]\!]$ y seraient or ils sont au nombre de $i-2 \geq 2$, et cela n'est possible que si $i = 4$ car le support de $\varphi(1,i)$ n'a que 2 éléments.
Dans ces conditions, $\varphi((1\,4)) = (a_2, a_3) = (a_1, a_3)(a_2, a_1)(a_1\, a_3) = \varphi((3,1)(1\,2)(1\,3))$ et par injectivité, on a $(1,4) = (3\,1)(1,2)(1,3)$ ce qui est fausse.
Donc a_1 est dans le support de $\varphi((1,i))$. Cette dernière s'écrit (a_1, a_i) et par injectivité de φ, $a_i \neq a_h$ pour $h < i$.

* Conclusion :

On a donc n éléments de $[\![1, n]\!]$, $a_1, \ldots, a_n$ 2 à 2 distincts tels que $\varphi((1,i)) = (a_1, a_i)$ pour $i \leq n$.
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma(i) = a_i$, alors on a $\sigma \circ (1, i) \circ \sigma^{-1} = (a_1, a_i)$
Donc φ coïncide sur T', ~~génératrice de $\mathfrak{S}_n$~~, avec l'automorphisme intérieur $\varphi_\sigma : s \mapsto \sigma \circ s \circ \sigma^{-1}$
Et comme φ est un morphisme et T' générateur de $\mathfrak{S}_n$, on a alors $\varphi = \varphi_\sigma$.

Donc pour $n \neq 6$, les automorphismes sont intérieurs.